Bestimmung der Axen bei den Ellipsen.

Von **Nikolaus Fialkowski.**

(Mit II Tafeln.)

§. 1.

Es ist allgemein bekannt, dass die Axen bei einer Ellipse gefunden werden können, sobald die Ellipse selbst gegeben ist; allein in dem Falle, wenn die Ellipse selbst nicht gegeben ist, also erst construirt werden soll, und zur Construction derselben nur irgend eine von den zwei Axen oder nur irgend einer von den zwei conjugirten Durchmessern nebst der Tangente gegeben ist, haben wir keine allgemeine Lösung.

Die Lösung dieser Aufgabe kann also nur dann allgemein genannt werden, wenn sie für jeden Fall oder, was dasselbe ist, für jede beliebige Stellung, welche die gegebene Tangente gegen die gegebene Gerade als Axe einnehmen kann, gleiche Geltung hat.

§. 2.

Stellungen einer Tangente gegen die gegebene Axe.

Eine Gerade als Tangente kann gegen die gegebene Axe folgende drei Hauptstellungen haben:

Sie kann auf die gegebene Axe in einem der zwei Endpunkte normal sein; oder so, dass die beiden Verlängerungen sich schneiden können; oder endlich so, dass die Tangente und die Axe zu einander parallel sind.

Im ersten dieser drei Fälle ist die Auflösung dieser Aufgabe unmöglich oder vielmehr unbestimmt, da hier unzählig viele Ellipsen construirt werden können, deren jede die gegebene Axe so wie die Tangente gemeinschaftlich haben; im zweiten dieser drei Fälle ist die Auflösung bestimmt, selbst dann, wenn der Durchschnittspunkt der Verlängerungen der zwei gegebenen Linien, auf der Zeichenfläche nicht erhalten werden kann; endlich im letzten Falle ist dies

Auflösung vollkommen bestimmt, indem durch die zur gegebenen Axe parallele Tangente auch die zweite Axe gegeben ist.

Dieser Betrachtung und Vorstellung gemäss haben wir in dem zweiten Falle, als demjenigen, der im praktischen Leben so wie in der Theorie vorkommt, zwei Lösungsarten zu unterscheiden, je nachdem die Verlängerungen der zwei gegebenen Geraden, d. i. der Tangente und der Axe, sich auf der Zeichenfläche schneiden oder nicht.

Für den ersten Fall, d. i. für den, wenn die Verlängerungen dieser zwei Geraden sich noch auf der Zeichenfläche schneiden, finden wir wohl in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie eine Lösung, allein für den zweiten nicht; wir wollen nun hier, unserm gegebenen Versprechen gemäss, eine allgemeine, also für jeden Fall giltige Lösung geben, mag die Verlängerung der Axe von der gegebenen Tangente geschnitten werden oder nicht, woraus dann auch eine einfache Construction der Ellipse von selbst folgt.

In Bezug auf die Verlängerung der gegebenen Axe oder des gegebenen conjugirten Durchmessers und auf die Wahl der fixen Punkte sind im Allgemeinen zwei Fälle zu bemerken, denn es können die fixen Punkte, wie wir nachweisen werden, in der gegebenen Axe selbst, oder in deren Verlängerung angenommen werden; es wird daher die Construction der fraglichen Axen oder des fraglichen conjugirten Durchmessers ohne Verlängerung der gegebenen Axe oder des gegebenen conjugirten Durchmessers möglich sein.

In Hinsicht der Axen und der conjugirten Durchmesser haben wir vier Fälle zu unterscheiden, je nachdem die grosse oder die kleine Axe, der grössere oder der kleinere conjugirte Durchmesser nebst der Tangente gegeben ist.

Wir wollen also in allen diesen Fällen die Construction durchführen, zugleich aber auch die weitere Bestimmung der Ellipsenpunkte zeigen.

§. 3.

A) Bestimmung der Axen mit Hilfe einer noch auf der Zeichenfläche möglichen Verlängerung der gegebenen Axe.

a) Bestimmung der kleinen Axe bei einer Ellipse, wenn zur Construction derselben nur die grosse Axe und die Tangente gegeben sind, und wenn sich die zwei Linien, auch wenn sie verlängert werden, auf der Papierfläche nicht schneiden.

Es sei AB (Taf. 1, Fig. 1) die grosse Axe und tg die gegebene Tangente; man soll die kleine Axe suchen, sodann aber auch die Ellipse construiren.

Wie unter diesen Bedingungen die Ellipse construirt wird, haben wir in unserer Abhandlung über die Construction des Kreises und der Ellipse [1]) bereits angegeben und bewiesen, wie aber die kleine Axe in diesem Falle bestimmt wird, das wollen wir sogleich zeigen.

Sollte nun in diesem Falle die kleine Axe gefunden werden, so braucht man zuerst einen ausserhalb der Axe liegenden Punkt zu bestimmen; dieser kann aber kein anderer sein als der Berührungspunkt der gegebenen Tangente mit der zu zeichnenden Ellipse, welcher nach dem in der genannten Abhandlung angegebenen Verfahren construirt werden kann.

Dieser Berührungspunkt wird also in unserer Figur der Punkt G sein, welcher dadurch gefunden wird, indem man durch A auf AB die Normale CE führt, $AE = AC$ macht, in B die BD lothrecht auf AB errichtet, sodann D mit E verbindet, und im Durchschnittspunkte F abermals eine Senkrechte errichtet, bis diese die Tangente in G schneidet.

Ist nun auf diese Art der Berührungspunkt bestimmt, so beschreibe man über der grossen Axe AB einen Halbkreis, verlängere diejenige Gerade, in welcher sich der Berührungspunkt befindet, d. i. die FG über G hinaus bis die Peripherie des über AB beschriebenen Kreises bei H geschnitten wird, lege dann durch H und durch irgend einen andern Punkt des über AB beschriebenen Halbkreises, hier durch J eine Gerade bis zu der Axe, wodurch man in derselben einen fixen Punkt α erhält. Wird ferner dieser Punkt mit dem bereits gefundenen Ellipsenpunkte G durch eine Gerade verbunden, und aus dem Punkte J die $JK \perp AB$ gezogen, so erhält man einen zweiten Punkt der Ellipse, d. i. den Punkt L, und dieser ist derjenige, den wir zur Bestimmung der kleinen Axe benöthigen.

Um nun mittelst diesen die kleine Axe zu bestimmen, errichte man in O die OM normal auf AB, führe dann aus M durch J eine Gerade, welche die Verlängerung der Axe AB in dem fixen Punkte β

---

[1]) Aprilheft des Jahrganges 1855 der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften Bd. XVI, S. 9.

schneidet, und ziehe endlich aus diesem Punkte durch L ebenfalls eine Gerade, bis sie die OM in N schneidet, wodurch ON als die kleine Halbaxe erfolgt.

Beweis.

I. Der Beweis für die Richtigkeit des Punktes N folgt schon aus der Construction, wenn man sich die zu zeichnende Ellipse durch die Drehung des über AB als Durchmesser beschriebenen Kreises entstanden denkt. Denn sind die Punkte J und M Punkte des Kreises, ferner der Punkt β als ein fixer Punkt der durch J und M gelegten Geraden, und $N\beta$ als eine Stellung der Geraden $M\beta$ nach der Drehung, so ist, da der Punkt L als ein Punkt der Ellipse gefunden wurde, auch der Punkt N ein Punkt derselben, und zwar ein Endpunkt der kleinen Axe, indem der Punkt M in CD, zugleich aber auch in der über AB beschriebenen Kreislinie liegt; somit ist die NO die kleine Halbaxe, und daher, wenn $N'O = NO$ gemacht wird, ist NN' die gesuchte kleine Axe.

II. Man kann aber den Beweis auch auf folgende Art führen:

Werden die Dreiecke $MO\beta$ und $KJ\beta$, ferner $NO\beta$ und $LK\beta$ mit einander verglichen, so finden wir, dass je zwei und zwei einander ähnlich sind, nämlich

$$\Delta MO\beta \sim \Delta JK\beta,$$

und ebenso

$$\Delta NO\beta \sim \Delta LK\beta,$$

aus welchen folgende brauchbare Proportionen folgen:

$$JK : MO = K\beta : O\beta,$$

und

$$LK : NO = K\beta : O\beta;$$

daher

$$JK : MO = LK : NO$$

oder

$$JK : LK = MO : NO \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}.$$

Setzt man nun die grosse Axe $AB = 2a$

und die kleine Axe . . . . . . $= 2b$

so ist die fragliche Halbaxe . . . $NO = b$;

da also der Punkt L als ein Punkt der Ellipse gefunden wurde, so folgt:

$$JK : LK = a : b,$$

also auch

$$MO : NO = a : b;$$

oder wenn wir auch für die ersten zwei Ausdrücke der Proportion I die entsprechenden Werthe suchen, so finden wir, da

$$\overline{JK}^2 = \overline{JO}^2 - \overline{KO}^2 = a^2 - x^2,$$

also

$$JK = \sqrt{a^2 - x^2}$$

und $LK = y$ ist,

$$\sqrt{a^2 - x^2} : y = a : b,$$

woraus durchs Quadriren

$$a^2 - x^2 : y^2 = a^2 : b^2,$$

durch weitere Operation

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

und hieraus durch Division mit $a^2\, b^2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also eine bekannte Gleichung der Ellipse folgt.

Folglich ist der Punkt N ein Punkt der Ellipse, und da dieser in dem senkrecht auf AB gezogenen Halbmesser, also in der Richtung der kleinen Axe liegt, so muss er ein Endpunkt der kleinen Axe, daher NO die kleine Halbaxe, folglich NN' die kleine gesuchte Axe sein w. z. b. w.

§. 4.

Bestimmung der übrigen Punkte bei der Ellipse.

Sind auf diese Art die beiden Axen bestimmt, so kann man bekannter Weise auf die eine oder die andere Art die übrigen erforderlichen Punkte einer Ellipse suchen; es wäre aber ganz überflüssig und unzweckmässig, bei dieser schon gemachten Construction irgend eine andere Methode in Anwendung zu bringen, indem schon mit Hilfe der zur Bestimmung der Axen erforderlichen Linien und derjenigen, welche zur Bestimmung der Diagonalpunkte erfordert werden, im Ganzen 20 Punkte gefunden werden können. Denn hat man den zur Bestimmung der Axen erforderlichen Punkt L (Fig. 2) gefunden, so gibt er mittelst der parallelen Sehnen noch 3 andere Punkte der Ellipse, d. i. 9, 11, 19, welche jedesmal sehr leicht gefunden werden können.

Da nun die vier Endpunkte der Axen ebenfalls Ellipsenpunkte sind, und wenn man nach dem in unserer Abhandlung angegebenen Verfahren, wie dies übrigens auch aus der Figur ersichtlich ist, die zwei Diagonalpunkte, hier 2 und 7 bestimmt, so hat man durch diese, indem sie verschiedene Höhen haben, vermittelst der Parallelen acht weitere Punkte für die zu zeichnende Ellipse; daher im Ganzen zwanzig Punkte, also mehr als ein geübter Zeichner braucht.

§. 5.

b) Bestimmung der grossen Axe, wenn nur die kleine Axe und eine Tangente gegeben ist.

So wie hier unter der gegebenen Bedingung die kleine Axe gefunden wurde, ebenso kann auch die grosse Axe gefunden werden, wenn nur die kleine Axe und eine Tangente gegeben ist.

Es sei AB (Fig. 3) die kleine Axe und tg die Tangente; man soll die Ellipse construiren und in dieser die grosse Axe der Grösse nach bestimmen.

Man suche zuerst den Berührungspunkt G und den ihm in dem über AB beschriebenen Halbkreise entsprechenden Punkt H, verbinde H mit irgend einem Punkte des Halbkreises hier mit J, verlängere die Gerade HJ bis sie die Verlängerung der Ax' in α schneidet; alsdann führe man durch J die JK senkrecht auf AB, verlängere die JK über J hinaus, wodurch in $G\alpha$ ein dem Punkte J entsprechender Ellipsenpunkt L erfolgt, und lege durch J und M eine Gerade bis zu der Axe, welches den fixen Punkt β gibt. Wird ferner aus dem so erhaltenen Punkte β durch L ebenfalls eine Gerade geführt, bis die Verlängerung von MO in N geschnitten wird, so ist N ein Endpunkt der grossen Axe, und NO die verlangte grosse Halbaxe derjenigen Ellipse, deren kleine Axe die AB ist.

Beweis.

Auch für diesen Fall kann der Beweis auf zweierlei Weise geführt werden, entweder durch Anschauung oder durch die Analysis.

Zum Behufe des Beweises durch Anschauung kann hier der in unserer Abhandlung aufgestellte Satz benützt werden, nämlich der: dass eine und dieselbe Ellipse durch die Drehung des über der grossen oder über der kleinen Axe beschriebenen Kreises entstanden gedacht werden kann, wobei man, um dieselbe Ellipse zu sehen, zwei verschiedene Standpunkte als Beobachter annehmen muss, und zwar den einen Standpunkt in bestimmter und den andern in einer unendlichen Entfernung.

Wird das Auge des Beobachters in unendlicher Entfernung angenommen und die Ellipse durch die Drehung des über der kleinen Axe beschriebenen Kreises entstanden gedacht, so wird die Construction der Ellipse und folglich auch die Bestimmung der

grossen Axe auf einen einfachen Fall, nämlich auf den Fall zurückgeführt, wo die Verlängerung der gegebenen Axe von der der gegebenen Tangente geschnitten wird. Allein dieser Fall kann erst dann angewendet werden, wenn man hierbei nach dem von uns angegebenen Verfahren einen Punkt der Ellipse gefunden hat.

I. Ist also der Punkt G der Berührungspunkt der gegebenen Tangente mit der zu zeichnenden Ellipse, so könnte man den Endpunkt N der grossen Axe dadurch finden, indem man aus M durch H, d. i. durch den dem Berührungspunkte der Ellipse im Kreise entsprechenden Punkt, eine Gerade führt, bis die Verlängerung der kleinen Axe AB geschnitten wird, den so erhaltenen Durchschnittspunkt als den fixen Punkt benützt, und so die verlangte Axe erhält.

Allein dies ist nicht immer der Fall, und zwar insbesondere dann nicht, wenn der Berührungspunkt sehr nahe an dem Endpunkte der grossen Axe ist, weil in diesem Falle die erforderliche Linie, auch wenn sie verlängert wird, die Axe nicht schneiden kann; man müsste daher noch einen zweiten Punkt suchen.

Ist nun dieser z. B. der Punkt L, und der ihm entsprechende Punkt im Kreise der Punkt J, so muss, wenn die Punkte J und M Punkte des Kreises sind, und wenn die Linie βJM als die durch sie gelegt Gerade, deren fixer Punkt in der Axe der Punkt β ist, betrachtet wird, auch der Punkt N ein Punkt der Ellipse sein; und da dieser Punkt ohnehin in der Richtung der zu bestimmenden Axe liegt, so muss er ein Endpunkt der kleinen Axe sein, w. z. b. w.

II. Betrachtet man die zwei Paare von Dreiecken $NO\beta$, $LK\beta$, ferner $MO\beta$ und $JK\beta$, so findet man, dass je zwei einander ähnlich sind, nämlich:

$$\Delta NO\beta \backsim \Delta LK\beta$$

und

$$\Delta MO\beta \backsim \Delta JK\beta,$$

woraus folgende Proportionen aufgestellt werden können:

$$NO : LK = \beta O : \beta K$$

$$MO : JK = \beta O : \beta K;$$

daher

$$MO : JK = NO : LK$$

oder

$$MO : NO = JK : LK \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Da nun der Punkt L als ein Punkt der Ellipse gefunden wurde und $MO = AO = b$ gegeben ist, so hat man

$$JK : LK = b : a,$$

also auch $$MO : NO = b : a,$$

folglich ist NO die halbe grosse Axe, und N ein Endpunkt derselben.

Oder wenn wir für die in (I) aufgestellte Proportion die entsprechenden Werthe suchen und diese in (I) substituiren, so haben wir, da

$$\overline{JK}^2 = \overline{OJ}^2 - \overline{OK}^2 = b^2 - y^2$$

also $$JK = \sqrt{\overline{OJ}^2 - \overline{OK}^2} = \sqrt{b^2 - y^2} \text{ ist,}$$

und $LK = x$ gesetzt werden kann,

$$b : a = \sqrt{b^2 - y^2} : x,$$

woraus $$bx = a\sqrt{b^2 - y^2},$$

hieraus durchs Quadriren

$$b^2x^2 = a^2(b^2 - y^2) = a^2b^2 - a^2y^2,$$

und durch Division mit a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also eine bekannte Gleichung der Ellipse folgt.

Es ist daher der auf obige Art gefundene Punkt N ein Ellipsenpunkt, und da er in der Richtung der grossen Axe liegt, so ist er ein Endpunkt derselben; somit ist NO die verlangte halbe Grossaxe w. z. b. w.

§. 6.

Aus der Construction der Fig. 3 sieht man wohl leicht ein, dass für den vorgelegten Fall die Verlängerung der Axe von der der gegebenen Tangente nur dann auf der Zeichenfläche nicht geschnitten wird, wenn der Berührungspunkt der gegebenen Tangente zu nahe an dem Endpunkte der zu suchenden Axe ausfallen sollte.

In allen andern Fällen, wo der Berührungspunkt von dem Endpunkte der zu suchenden Axe bedeutend weit entfernt ist, wird man den Durchschnittspunkt der Verlängerung der Axe mit der der Tangente auf der Papierfläche erhalten, ohne dass die Verlängerungen zu weit gezogen werden müssen.

Die Wichtigkeit und Brauchbarkeit dieser Construction kann man noch besser dann einsehen, wenn man sich die Fig. 3 so

gestellt denkt, dass die Axe NN' in der Perspective parallel zur Basis ist, welcher Fall in der Perspective meistens vorkommt. Wir finden aber hierfür in keinem Lehrbuche der analytischen Geometrie oder der Perspective ein Verfahren, wie man die Axen bestimmt; es dürfte daher diese Construction jedem Freunde der mathematischen Wissenschaften, insbesondere aber denen der Perspective willkommen sein, um so mehr, da diese Construction allgemein ist, also auch dann gilt, wenn in der Perspective der Fall eintritt, dass zur Construction der Ellipse nur einer von den conjugirten Durchmessern, und eine zum zweiten solchen Durchmesser parallele Sehne gegeben ist, wie dies in einem der folgenden Paragraphen zu sehen sein wird.

§. 7.

Bestimmung der übrigen Punkte der Ellipse für den vorhergehenden Fall.

Dass man auch in diesem Falle, für welchen wir die Construction der Axen sammt Beweis bereits angegeben haben, zur weiteren Construction der Ellipse eine bedeutende Anzahl von Punkten auf eine sehr einfache Art bestimmen kann, versteht sich von selbst; indem, wie bekannt, jeder aufgefundene Punkt der Ellipse drei correspondirende Punkte hat, wovon zwei in den Richtungen der zu den Axen durch diesen bereits gefundenen Punkt gezogenen Parallelen ind und einer in der aus diesem Punkte durch den Mittelpunkt der Ellipse gezogenen Geraden ist.

Die vorzüglichsten Punkte bleiben wohl jedesmal die Diagonalpunkte, deren Construction wir in unserer früheren Abhandlung über den Kreis und über die Ellipse bereits angegeben haben.

§. 8.

c) Bestimmung der zweiten conjugirten Axe, wenn zur Construction der Ellipse, die eine dieser Axen, und die Richtung der zweiten Axe nebst der Tangente an die zu zeichnende Ellipse gegeben ist.

Es sei AB (Fig. 4) die eine conjugirte Axe, ferner YY' die Richtung der zweiten solchen Axe, und tg die gegebene Tangente; man soll die Ellipse construiren und in derselben die zweite Axe ihrer Länge nach bestimmen.

Man suche zuerst den Berührungspunkt der gegebenen Tangente an die zu zeichnende Ellipse, welcher hier der Punkt G sein wird, und der dadurch gefunden wurde, indem man durch A und B zu YY' eine Parallele geführt, $AE = AD$ gemacht, C mit E verbunden, und durch den so erhaltenen Punkt F zu YY' eine Parallele gezogen hat; man beschreibe ferner über AB als Durchmesser einen Halbkreis, errichte in den Punkten F und O Normale auf AB, und verlängere sie bis zu der Peripherie des über AB beschriebenen Halbkreises, wodurch man die Punkte M und H erhält; alsdann nehme man in der Peripherie des Halbkreises AMB einen beliebigen Punkt J an, führe durch diesen aus dem Punkte H eine Gerade, bis die Verlängerung der gegebenen conjugirten Axe AB in α geschnitten wird; ebenso führe man aus M durch J eine Gerade, bis diese die Axe in β schneidet; wird endlich der so gefundene fixe Punkt α mit G verbunden, sodann aus J auf AB eine Normale gezogen, ferner durch den Fusspunkt K dieser Normalen zu YY' eine Parallele KL geführt, und aus dem fixen Punkte β durch den Durchschnittspunkt L eine Gerade gezogen, bis die YY' in N geschnitten ist, so erfolgt der Punkt N als ein Endpunkt der gesuchten Axe, und es wird alsdann NO die halbe solche conjugirte Axe sein.

Beweis.

Auch für diese Construction kann der Beweis auf zweierlei Art geführt werden.

I. Denkt man sich die zu zeichnende Ellipse durch die Drehung des über AB als Durchmesser beschriebenen Kreises entstanden, welches aber dann eintritt, wenn der Augepunkt im Durchschnittspunkte der Verlängerungen der Axe und der Tangente, und der Distanzpunkt in der Verlängerung der CE über C hinaus angenommen wird, so ist, da die Punkte H und J Punkte des Kreises sind, ferner G und L als Ellipsenpunkte gefunden wurden, auch der Punkt N ein Ellipsenpunkt, und da N in der Richtung der fraglichen Axe liegt, so muss er nothwendiger Weise ein Endpunkt derselben, und daher NO die halbe verlangte Axe sein w. z. b. w.

II. Betrachten wir die durch diese Construction entstandenen Dreiecke $MO\beta$, $JK\beta$, $NF\beta$, $LK\beta$, $HF\alpha$, $JK\alpha$, $GF\alpha$ und $LK\alpha$, so finden wir, da $HF \parallel JK \parallel MO$, und ebenso, da $FG \parallel$

$KL \parallel NO$ ist, dass je zwei und zwei Dreiecke einander ähnlich sind; es ist nämlich:

$$\Delta MO\beta \sim \Delta JK\beta,$$

und

$$\Delta NO\beta \sim \Delta LK\beta,$$

ferner

$$\Delta HF\alpha \sim \Delta JK\alpha$$

und

$$\Delta FG\alpha \sim \Delta LK\alpha;$$

es finden daher folgende Proportionen Statt:

$$MO : JK = \beta O : \beta K$$

und

$$NO : LK = \beta O : \beta K,$$

daher

$$MO : JK = NO : LK$$

oder

$$MO : NO = JK : LK \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}).$$

Setzen wir nun $AB = 2a'$ und $NN' = 2b'$, also $AO = MO = \frac{AB}{2} = a'$, und $NO = \frac{NN'}{2} = b'$, ferner $LK = y'$ und suchen die JK, welche, wenn wir uns die JO gezogen denken,

$$= \sqrt{\overline{JO}^2 - \overline{KO}^2} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{KO}^2} = a'^2 - x'^2$$

ist, so haben wir durch Substitution dieser Werthe in die obige Proportion (I):

$$a' : b' = \sqrt{a'^2 - x'^2} : y',$$

woraus

$$a'y' = b' \sqrt{a'^2 - x'^2},$$

daraus durchs Quadriren und weitere Operation

$$a'^2 y'^2 = b'^2 (a'^2 - x'^2) = a'^2 b'^2 - b'^2 x'^2,$$

und hieraus durch Division mit $a'^2 b'^2$ erhält man endlich

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1,$$

also eine bekannte Gleichung der Ellipse für das schiefwinkelige Coordinaten-System.

Somit ist der Punkt N ein Ellipsenpunkt und zwar ein Endpunkt des zweiten conjugirten Durchmessers, weil NO die Richtung desselben ist.

Es ist daher NO die gesuchte conjugirte Halbaxe w. z. b. w.

§. 9.

Bestimmung der übrigen Punkte bei dieser Ellipse.

Indem man in diesem Falle die zweite conjugirte Axe sucht, benützt man sogleich die gefundenen Punkte, um die Construction der Ellipse weiter zu vollführen. So gibt z. B. der Punkt G (Fig. 5), d. i.

der Berührungspunkt mittelst Parallelen, noch drei andere Ellipsenpunkte; der Punkt L gibt ebenfalls 4 Ellipsenpunkte; werden überdies noch zwei Diagonalpunkte gesucht, so hat man mit Benützung derer vermittelst der parallelen Sehnen noch 8 Punkte der Ellipse; man hat daher, mit Einschluss der Endpunkte der beiden Axen, im Ganzen 20 Punkte für die zu zeichnende Ellipse.

§. 10.

d) Bestimmung des grösseren conjugirten Durchmessers, wenn der kleinere nebst der Tangente gegeben ist, und die Richtung des zweiten Durchmessers bekannt ist.

Es sei AB (Fig. 6) der kleinere conjugirte Durchmesser, YY' die Richtung des zweiten solchen Durchmessers, und tg als die Tangente gegeben; man soll die Ellipse construiren und in dieser den zweiten conjugirten Durchmesser bestimmen.

Auch bei dieser Aufgabe werden wir zwei Constructionsfälle unterscheiden müssen, indem die Verlängerung der Axe von der der Tangente noch auf der Zeichenfläche geschnitten werden kann oder nicht.

Kann ein solcher Durchschnittspunkt auf der Zeichenfläche erhalten werden, so braucht man nur den von uns in unserer Abhandlung angegebenen Satz in Anwendung zu bringen, nämlich den, dass eine Ellipse auch durch die Drehung eines über dem kleinen conjugirten Durchmesser beschriebenen Kreises entstanden gedacht, und somit auch construirt werden kann.

Ist es hingegen nicht der Fall, d. h. kann der fragliche Durchschnittspunkt auf der Zeichenfläche nicht erhalten werden, oder gestattet es der Raum nicht einen solchen zu erhalten, so wird auch in diesem Falle eine Construction angewendet, welche ähnlich ist mit der vorhergehenden.

Es wird nämlich zuerst der Berührungspunkt gesucht, d. i. hier der Punkt G, alsdann über AB als Durchmesser ein Halbkreis AMB beschrieben, in F und O die MO und FH normal auf AB gezogen, durch F zu YY' eine Parallele geführt, ferner auf dem Halbkreise AMB der Punkt J beliebig angenommen, durch den Punkt J aus H die $H\alpha$, und aus M die $M\beta$ bis zu der Verlängerung der Axe gezogen, sodann aus J die $JK \perp AB$, und aus K zu YY' eine Parallele gelegt; endlich G mit α verbunden und aus β durch L eine

Gerade gezogen bis die YY' in NM geschnitten ist, wodurch NM als ein Endpunkt des verlangten conjugirten Durchmessers, und NMO als die Hälfte desselben erhalten wird.

Auch bei dieser Ellipse erfolgen 20 Punkte für dieselbe, sobald man nur noch zwei Diagonalpunkte sucht und die diesen Punkten correspondirenden Punkte bestimmt.

§. 11.

B) Bestimmung der Axen ohne Verlängerung der gegebenen Axe.

Wir haben bis jetzt die Bestimmung der Axen mit Hilfe der Verlängerung der Axen ausgeführt; da es aber nicht immer möglich ist, die gegebene Axe nach irgend einer Seite hin zu verlängern, so ist es jedenfalls wünschenswerth eine Construction zu haben, welche uns angibt, wie man die zu suchende Axe auch ohne die mindeste Verlängerung der gegebenen Axe bestimmt.

Wir wollen nun zeigen, wie man auch unter dieser Bedingung die Construction der Axen und der Ellipse finden kann.

a) Bestimmung der kleinen Axe, wenn die grosse Axe nebst der Tangente gegeben ist, und die gegebene Axe nicht verlängert werden darf.

Es sei also AB (Taf. II, Fig. 7) als Axe, und tg als die Berührende gegeben; man soll die zweite Axe bestimmen, und auch die Ellipse construiren, ohne dass man die gegebene AB verlängert.

Man suche zuerst nach der gegebenen Weise den Berührungspunkt G, beschreibe über der gegebenen Axe AB einen Kreis, verlängere die FG bis zu der Peripherie dieses Kreises, und errichte in dem Halbirungspunkte O der AB auf AB eine Normale bis zu der Peripherie; alsdann nehme man in dieser Peripherie den Punkt J beliebig an, verbinde ihn mit H und M, wodurch man in der Axe AB die zwei fixen Punkte α und β erhält; nun führe man aus J zu MO eine Parallele, und aus dem gefundenen Berührungspunkte G durch den fixen Punkt α eine Gerade, bis jene von dieser bei K geschnitten ist; wird endlich aus K durch β eine Gerade geführt, so schneidet diese die MO im Punkte N, welcher ein Endpunkt der verlangten Axe ist; es ist somit die NO die Hälfte der verlangten Axe.

Beweis.

I. Denken wir uns die zu zeichnende Ellipse durch die Drehung des über AB als Durchmesser beschriebenen Kreises entstanden, so dass der Punkt H nach der Drehung nach G kommt, so muss die aus H durch einen beliebigen Punkt α der Axe AB gelegte Gerade in die Richtung der $G\alpha$ fallen, und es wird der Kreispunkt J nach K kommen; so wie nun der Punkt H, nach der Drehung der Punkt G, ein Punkt der Ellipse ist, und in der zu MO gezogenen Parallelen liegt, ebenso wird auch der Punkt J nach der Drehung in der Verlängerung der $G\alpha$ und in der durch J zu MO gezogenen Parallelen enthalten sein; da also dieser Punkt in der Ju, zugleich aber auch in der Gv liegt, so muss er im Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden, also in K sein; es ist also der Punkt K ebenfalls ein Punkt der Ellipse.

Da ferner der Punkt M als Endpunkt des auf AB im Halbirungspunkte O normalen Durchmessers nach der Drehung in der Kw, zugleich aber auch in der MO liegt, so muss er im Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden, somit in N liegen. Es ist daher der Punkt N ein Endpunkt der verlangten Axe, und NO die Hälfte dieser Axe.

II. Betrachten wir die nach dieser Construction entstandenen Dreiecke $MO\beta$, $JL\beta$, $NO\beta$ und $KL\beta$, so finden wir, dass je zwei und zwei einander ähnlich sind; es ist nämlich:

$$\Delta MO\beta \backsim \Delta JL\beta.$$

und

$$\Delta NO\beta \backsim \Delta KL\beta.$$

indem

$$MO \parallel JL$$

ist; man hat demnach folgende brauchbare Proportionen:

$$MO:O\beta = JL:L\beta,$$

und

$$NO:O\beta = KL:L\beta;$$

setzen wir nun der Kürze wegen

$$MO = BO = a,\ NO = b,$$

ferner

$$LO = x,\ KL = y$$

und

$$O\beta = \mu,\ L\beta = \nu,$$

so können wir auch die LK finden, sobald wir uns die JO gezogen denken; weil dann

$$\overline{JL}^2 = \overline{OJ}^2 - \overline{OL}^2 = a^2 - x^2,$$

also

$$JL = \sqrt{a^2 - x^2}$$

ist.

Werden nun diese Werthe in die zwei obigen Proportionen substituirt, so erhält man:

$$a : \mu = \sqrt{a^2 - x^2} : \nu$$

und

$$b : \mu = y : \nu$$

oder bruchweise geschrieben

$$\frac{a}{\mu} = \frac{\sqrt{a^2 = x^2}}{\nu}$$

und

$$\frac{b}{\mu} = \frac{y}{\nu}.$$

Dividiren wir diese zwei Gleichungen Glied für Glied durch einander, so folgt

$$\frac{a}{\mu} \cdot \frac{\mu}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\nu} \cdot \frac{\nu}{y},$$

und

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{y}$$

woraus man

$$ay = b\sqrt{a^2 - x^2}$$

erhält, welche Gleichung, beiderseits quadrirt etc., gibt sofort $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ und hieraus durch Division mit a^2b^2 folgt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also eine bekannte Gleichung der Ellipse.

Somit ist der Punkt N ein Endpunkt der verlangten Axe, und NO die Hälfte dieser Axe, w. z. b. w.

§. 12.

b) Bestimmung der grossen Axe, wenn die kleine Axe nebst der Tangente gegeben ist, und die gegebene Axe nicht verlängert werden darf.

So wie die kleine Axe gefunden wurde, ebenso kann man auch die grosse Axe finden, ohne dass man die gegebene Axe zu verlängern braucht.

Es sei AB (Fig. 8) die kleine Axe, und tg die Tangente an die zu zeichnende Ellipse; man soll die grosse Axe der Länge nach bestimmen und die Ellipse construiren.

Man denke sich die zu zeichnende Ellipse durch die Drehung des über der kleinen Axe beschriebenen Kreises entstanden, beschreibe

auch wirklich einen solchen Kreis, und suche den Berührungspunkt G, so wird man sehr leicht den diesem Berührungspunkte entsprechenden Punkt in der Peripherie des Kreises, d. i. den Punkt H, finden; nun nehme man in der Peripherie dieses Kreises den Punkt J beliebig an, und verbinde ihn mit H und M durch Gerade, wodurch man in der AB die zwei fixen Punkte α und β erhält; wird alsdann aus dem Berührungspunkte G durch den fixen Punkt α eine Gerade, und durch J zu der Richtung der zu bestimmenden Axe eine Parallele geführt, sodann beide so weit verlängert, bis sie sich schneiden, und endlich aus dem so erhaltenen Durchschnittspunkte K durch den fixen Punkt β eine Gerade geführt, bis sie die Richtung der zu suchenden Axe scheidet, so erfolgt N als ein Endpunkt der verlangten Axe, und NO als die Hälfte einer solchen Axe.

Beweis.

I. Was den Beweis betrifft, so ist er ganz ähnlich mit den bei der vorhergehenden Construction angegebenen, indem diese Construction ebenso wie die vorhergehende ganz gewiss seine Richtigkeit hat, sobald man zugibt, dass die zu zeichnende Ellipse durch die Drehung des über der kleinen Axe beschriebenen Kreises entstanden gedacht werden kann. Denn ist G der Berührungspunkt, ferner H der ihm entsprechende Punkt in der Peripherie, M ein Endpunkt des auf AB in O gezogenen Durchmessers, und J ein Punkt in der Peripherie, welchem der Ellipsenpunkt K entspricht, so muss nothwendiger Weise die aus K durch den fixen Punkt β geführte Gerade die Länge der gesuchten Halbaxe abschneiden.

II. Man findet übrigens auch hier aus den nach dieser Construction entstandenen Dreiecken $MO\beta$, $JL\beta$, $NO\beta$ und $KL\beta$, dass je zwei und zwei einander ähnlich sind; es ist nämlich:

$$\Delta MO\beta \backsim \Delta JL\beta,$$

und

$$\Delta NO\beta \backsim \Delta KL\beta,$$

woraus die zwei brauchbaren Proportionen

$$MO:O\beta = JL:L\beta$$

und

$$NO:O\beta = KL:L\beta$$

folgen.

Wird nun hier die YY' als Ordinaten- und AB als die Abscissen-Axe angenommen, sodann der Kürze wegen

$$MO = BO = a,$$

ferner $LO = x, KL = y$
und $O\beta = \mu, L\beta = \nu$
gesetzt, so finden wir auch die $JL = \sqrt{a^2 - x^2}$, und haben somit durch Substitution in die zwei obigen Proportionen

$$a : \mu = \sqrt{a^2 - x^2} : \nu$$

und

$$b : \mu = y : \nu$$

oder

$$\frac{a}{\mu} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\nu}$$

$$\frac{b}{\mu} = \frac{y}{\nu''},$$

und hieraus durch Division

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{y},$$

woraus durch weitere Operation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also eine bekannte Gleichung der Ellipse folgt.

Es ist daher auch diese Construction ganz richtig.

§. 13.

Bestimmung der conjugirten Durchmesser, ohne dass man den gegebenen Durchmesser verlängert.

So wie man die kleine oder die grosse Axe bestimmen kann, ohne dass man die gegebene Axe zu verlängern braucht, ebenso kann man auch den fraglichen conjugirten Durchmesser finden, ohne den gegebenen im mindesten zu verlängern.

c) Bestimmung des kleineren conjugirten Durchmessers, wenn der grössere conjugirte Durchmesser nebst der Tangente gegeben ist, und der gegebene conjugirte Durchmesser nicht verlängert werden darf.

Es sei AB (Fig. 9) der grössere conjugirte Durchmesser, tg die gegebene Tangente, und XX' die Richtung des zu bestimmenden zweiten conjugirten Durchmessers.

Man bestimme zuerst den Berührungspunkt G, beschreibe über der gegebenen Axe AB als Durchmesser einen Kreis, durch dessen Drehung die zu zeichnende Ellipse entstanden gedacht wird; errichte auf AB in deren Punkten F und O Normale, bis die Peripherie in H und

M geschnitten ist; alsdann nehme man unterhalb der Axe AB in der Peripherie den Punkt J beliebig an, verbinde ihn mit H und M, fälle aus demselben die $JK \perp AB$, ziehe durch K eine Parallele zu XX', und führe aus dem gefundenen Berührungspunkte G durch den fixen Punkt α eine Gerade, bis diese Parallele in L geschnitten ist; wird endlich aus dem so erhaltenen Punkte L durch den zweiten fixen Punkt β eine Gerade geführt, bis die XX' in N geschnitten ist, so erfolgt N als der Endpunkt und NO als die verlangte Halbaxe.

I. Sind die Punkte H, M und J Punkte des Kreises, G und L aber Punkte der Ellipse, so muss nothwendiger Weise der Punkt N ebenfalls ein Punkt der Ellipse sein, sobald man sich die zu zeichnende Ellipse durch die Drehung des über AB als Durchmesser beschriebenen Kreises entstanden denkt, und annimmt, dass die MO in die Richtung der Ox, und FH in die durch F zu NO gezogene Parallele fällt u. s. w.

II. Werden die durch unsere Construction entstandenen Dreiecke $MO\beta$, $JK\beta$, ferner $NO\beta$ und $LK\beta$ in Betracht gezogen, die AB und XX' als Coordinaten-Axen angenommen, sodann $MO = BO = a'$, $NO = b'$, ferner $O\beta = \mu$, $K\beta = \nu$; $OK = x'$ und $KL = y'$ gesetzt, so hat man:

$$MO : O\beta = JK : K\beta$$

und

$$NO : O\beta = KL : K\beta,$$

in welche Proportionen die obigen Werthe substituirt, gibt

$$a' : \mu = JK : \nu$$

und

$$b' : \mu = y' : \nu;$$

denkt man sich nun die JO gezogen, so kann man dann auch die JK finden, indem dann

$$JK = \sqrt{JO^2 - OK^2} = \sqrt{a'^2 - x'^2}$$

ist; man hat daher durch Substitution in die obigen Proportionen

$$a' : \mu = \sqrt{a'^2 - x'^2} : \nu$$

$$b' : \mu = y' : \nu$$

oder

$$\frac{a'}{\mu} = \frac{\sqrt{a'^2 - x'^2}}{\nu}$$

$$\frac{b'}{\mu} = \frac{y'}{\nu},$$

aus welchen zwei Proportionen durch Division

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sqrt{a'^2 - x'^2}}{y'}$$

und durch weitere Operation

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1,$$

also eine bekannte Gleichung der Ellipse für das schiefwinkelige Coordinaten-System folgt.

Es ist somit der Punkt N ein Punkt der Ellipse, und zwar ein Endpunkt der fraglichen Axe.

§. 14.

d) Bestimmung des grösseren conjugirten Durchmessers, wenn zur Construction der Ellipse der kleinere conjugirte Durchmesser nebst der Tangente gegeben ist, und der gegebene Durchmesser nicht verlängert werden darf.

Es sei AB (Fig. 10) der kleinere conjugirte Durchmesser, tg die Tangente, und XX' die Richtung des zu bestimmenden zweiten conjugirten Durchmessers.

Man suche zuerst den Berührungspunkt G und den ihm entsprechenden Punkt im Kreise, hier den Punkt H; errichte in O die MO normal AB, verbinde den Punkt H mit irgend einem Punkte des Kreises, z. B. mit J, und J mit M durch eine Gerade; nun ziehe man aus J auf AB eine Normale JK, und führe durch K zu XX' eine Parallele; wird endlich aus G durch α eine Gerade gezogen bis die Parallele LL' bei L geschnitten wird, und aus L durch β ebenfalls eine Gerade geführt bis die XX' bei N geschnitten ist, so hat man N als den Endpunkt und NO als die Hälfte des verlangten conjugirten Durchmessers.

Auch der Beweis wird hierbei auf ähnliche Art, wie bei der vorhergehenden Figur geführt, indem auch hier von den durch Construction erhaltenen Dreiecken je zwei und zwei einander ähnlich sind; es ist nämlich:

$$\Delta MO\beta \sim \Delta JK\beta$$

und

$$\Delta NO\beta \sim \Delta KL\beta,$$

woraus die zwei Proportionen:

$$MO : O\beta = JK : K\beta$$

und

$$NO : O\beta = KL : K\beta$$

folgen.

Werden in diesen zwei Proportionen die entsprechenden Werthe gehörig substituirt, so erhält man durch weitere Operation die allgemeine Gleichung

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

als eine Gleichung der Ellipse für das schiefwinkelige Coordinaten-System, wodurch also nachgewiesen wird, dass die Construction ganz richtig ist.

Wird in dieser Figur die aus dem in der Peripherie des Hilfskreises beliebig angenommenen Punkte J auf die Axe AB gezogene Normale bis zu der Gegenseite der Peripherie verlängert, ferner die $KL' = KL$ gemacht, alsdann aus M durch J' eine Gerade gezogen bis die Verlängerung der AB in β' geschnitten ist und aus β' durch L' eine Gerade geführt, so muss diese nothwendiger Weise durch den Endpunkt des grösseren conjugirten Durchmessers gehen, wodurch also der Punkt N controlirt wird, im Falle er durch obige Construction undeutlich ausfallen sollte.

Wird überdies aus H durch J' die Gerade $HJ'\alpha$ gezogen, und aus α durch L' eine Gerade geführt, so muss sie nothwendigerWeise die Tangente bei G schneiden; auf diese Art kann man also jedesmal für einen in der Peripherie gegebenen Punkt einen Ellipsenpunkt auffinden, wenn nur ein Punkt der Ellipse gegeben ist.

§. 15.

Wir haben im vorhergehenden Paragraphen gesehen, wie man den Endpunkt des grösseren conjugirten Durchmessers erhält, ohne den gegebenen verlängern zu müssen; wir haben aber in derselben Figur den Endpunkt N auch dadurch bestimmt, indem wir die Axe verlängert haben. Vergleicht man nun diese zwei Constructionen mit einander, und fasst auch die der früheren Figur näher ins Auge, so sieht man sogleich ein, dass man bald die eine, bald die andere Verfahrungsart anzuwenden hat, je nachdem die grössere oder die kleinere Axe, der grössere oder der kleinere conjugirte Durchmesser zu suchen ist, indem sonst schiefe Durchschnitte entstehen, und die Endpunkte der zu suchenden Axe nicht genug deutlich bestimmt werden.

Im Allgemeinen ist hierbei das zu bemerken, dass wenn die grosse Axe oder der grössere conjugirte Durchmesser bestimmt werden soll, der Hilfspunkt in der Peripherie des über der gegebenen

Axe, oder über dem gegebenen conjugirten Durchmesser beschriebenen Kreises so gewählt werden muss, dass die zwei fixen Punkte der Axe in deren Verlängerung auf die eine oder die andere Seite fallen; ist hingegen die kleinere Axe oder der kleinere conjugirte Durchmesser zu bestimmen, so kann man und soll den Hilfspunkt auf der Peripherie des Hilfskreises so wählen, dass die betreffenden fixen Punkte auf der gegebenen Axe erhalten werden.

Fassen wir alle die angegebenen Sätze und Constructionen zusammen, so können wir folgenden Lehrsatz aufstellen:

Ist zur Construction einer Ellipse die eine Axe, oder der eine von den zwei conjugirten Durchmessern nebst der Tangente und der Richtung der zweiten Axe oder des zweiten conjugirten Durchmessers gegeben, so lässt sich jedesmal der Berührungspunkt dieser Tangente an die zu zeichnende Ellipse bestimmen, alsdann die Ellipse construiren, und in dieser die fehlende Axe oder der fehlende conjugirte Durchmesser der Länge nach finden.

Hat man also den Berührungspunkt, und ausser diesem auch noch irgend einen andern Punkt der Ellipse bestimmt, so kann man, wie Fig. 11 zeigt, mit Hilfe von einigen wenigen Punkten, d. i. der fixen Punkte der Axe, eine bedeutende Anzahl von Ellipsenpunkten bestimmen.

Wie man aus der Figur sieht, muss hier die Axe verlängert werden; allein man ist nicht immer im Stande, in einem solchen Falle die Ellipsenpunkte zu finden, weil nicht jedesmal die Axe von der Hilfslinie geschnitten werden kann, und es ist in diesem Falle die Lösung der Aufgabe nur dann allgemein, wenn man beliebig viele Punkte ohne Verlängerung der gegebenen Axe findet. Dies geschieht auf ähnliche Art, wie wir es bei der Bestimmung der Axen ohne Verlängerung der gegebenen Axe gesehen haben.

Ist nämlich AB (Fig. 12) der eine conjugirte Durchmesser, XX' die Richtung des zweiten, und J als ein Punkt der Ellipse gegeben, so suche man zuerst den diesem gegebenen Ellipsenpunkte entsprechenden Punkt J' in dem über AB als Durchmesser beschriebenen Kreise, indem man $Jm'' \parallel XX'$ führt, sodann durch den so in der AB erfolgten Punkt auf AB eine Normale führt. Soll nun ein zweiter Punkt der Ellipse bestimmt werden, so verbinde man einen beliebigen Punkt n der Peripherie des Kreises mit J', markire den so in der AB

erhaltenen fixen Punkt (hier β), fälle aus dem Punkte n auf AB eine Normale nn', führe durch deren Fusspunkt n' eine Parallele zu XX', und ziehe aus J durch β eine Gerade, bis die durch n' zu XX' gezogene Parallele geschnitten wird, wodurch man also n'' als einen Ellipsenpunkt erhält; wird alsdann $n'n''' = n'n''$ gemacht, so ist n''' der mit n'' correspondirende Punkt. Auf ähnliche Art bestimmt man jeden andern Ellipsenpunkt.

Wie man aus dieser Construction sieht, ist diese Auflösung ganz allgemein, ohne dass man die gegebene Axe zu verlängern braucht, und es hat daher folgender Satz ganz allgemeine Geltung:

Ist zur Construction der Ellipse eine Axe oder einer von den zwei conjugirten Durchmessern nebst der Richtung des andern und nur ein Punkt der Ellipse gegeben, so kann man jede beliebige Anzahl von Punkten für diese Ellipse finden, und die fehlende Axe oder den fehlenden conjugirten Durchmesser der Länge nach bestimmen.